

解得 $m = -3$. 不等式 $(2a-1)^{-m} < (a+3)^{-m}$ 即 $(2a-1)^3 < (a+3)^3$, 又函数 $y = x^3$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 因此 $2a-1 < a+3$, 解得 $a < 4$, 所以 a 的取值范围为 $(-\infty, 4)$.

14. 【解】(1) 因为幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象过点 $(2, 4)$, 所以 $4 = 2^a$, 解得 $a = 2$, 所以函数 $f(x) = x^2$.

(2) $h(x) = 2f(x) - kx - 1 = 2x^2 - kx - 1$, 其图象对称轴为直线 $x = -\frac{k}{4} = \frac{k}{4}$.

因为 $h(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调,

所以 $\frac{k}{4} \leq -1$ 或 $\frac{k}{4} \geq 1$, 解得 $k \leq -4$ 或 $k \geq 4$, 所以实数 k 的取值范围为 $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$.

15. 【解】(1) 由题意得 $m^2 + m - 5 = 1$, 解得 $m = 2$ 或 $m = -3$, 故 $f(x) = x^4$ 或 $f(x) = \frac{1}{x}$. 又幂函数 $f(x) = (m^2 + m - 5)x^{m+2}$ 的图象不过原点, 故 $f(x) = \frac{1}{x}$.

(2) 当 $x > 0$ 时, $g(x) = 2f(x) + \frac{1}{x} = \frac{2}{x} + x$. $\forall x < 0$, 则 $-x > 0$, $g(-x) = -\frac{2}{x} - x$. 又因为 $g(x)$ 是偶函数, 所以 $g(x) = g(-x) = -\frac{2}{x} - x$.

综上, $g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} + x, & x > 0, \\ -\frac{2}{x} - x, & x < 0. \end{cases}$

16. 【解】(1) \because 幂函数 $f(x) = x^{(3-k)k}$ ($k \in \mathbf{Z}$) 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore k(3-k) > 0$, 解得 $0 < k < 3$. $\therefore k \in \mathbf{Z}$, $\therefore k = 1$ 或 $k = 2$.

当 $k = 1$ 或 $k = 2$ 时, $f(x) = x^2$ 满足题意, $\therefore f(x) = x^2$.

(2) $\because f(x) = x^2$, $\therefore g(x) = mx^2 + mx + 1$.

当 $m = 0$ 时, $g(x) = 1$ 不合题意;
当 $m \neq 0$ 时, 函数 $g(x)$ 图象的对称轴为直线 $x = -\frac{1}{2}$, \therefore 函数 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调.

$\therefore \begin{cases} m < 0, \\ g(0) = 5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m > 0, \\ g(1) = 5, \end{cases}$
解得 $m = 2$.

17. 【解】(1) 由题意得 $3m^2 - 2m = 1$, 解得 $m = -\frac{1}{3}$ 或 $m = 1$.

当 $m = 1$ 时, $f(x) = x$, 函数 $f(x) = x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 不合题意;

当 $m = -\frac{1}{3}$ 时, $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$, 函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 但 $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, 所以函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ 在定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上不单调, 符合题意. 所以 $m = -\frac{1}{3}$, $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$.

(2) 因为函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 关于原点对称, 且 $f(-x) = (-x)^{-\frac{1}{3}} = -x^{-\frac{1}{3}} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数. 因为 $f(a+1) + f(2a-3) < 0$, 所以 $f(a+1) < -f(2a-3) = f(3-2a)$, 即 $(a+1)^{-\frac{1}{3}} < (3-2a)^{-\frac{1}{3}}$.

又 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减且恒负, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减且恒正,

所以 $\begin{cases} a+1 > 0, \\ 3-2a > 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a+1 < 0, \\ 3-2a < 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a+1 > 3-2a \\ a+1 > 3-2a \end{cases}$
 $\begin{cases} a+1 < 0, \\ 3-2a > 0. \end{cases}$ 解得 $a < -1$ 或 $\frac{2}{3} < a < \frac{3}{2}$, 所以实数 a 的取值范围是

$$(-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right).$$

985 冲刺专题五 函数性质的综合应用

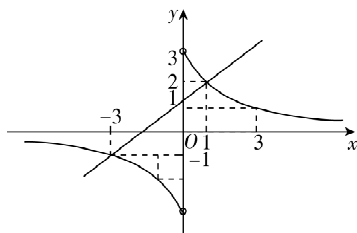
1. B 【解析】依题意, $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 所以 $f(-3) = f(3)$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $1 < 3 < \pi$, 所以 $f(1) < f(-3) < f(\pi)$, 故 B 正确.

2. D 【解析】 $\because f(x) = -x|x| + 2x$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(-x) + f(x) = x|x| - 2x - x|x| + 2x = 0$, $\therefore f(x)$ 为奇函数, 故 AB 错误;

\because 当 $x > 0$ 时, $f(x) = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$, 为开口向下的抛物线的一部分, 抛物线的对称轴方程为 $x = 1$, $\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 又 $\because f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 即奇函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 故 C 错误, D 正确.

3. C 【解析】因为函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数, 根据奇函数的对称性可知, 函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示. 令

$$g(x) = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4},$$



因为 $f(1) = g(1) = 2$, $f(-3) = g(-3) = -1$, 结合函数图象可知, 满足不等式 $f(x) \geq \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ 的 x 的取值范围为 $(-\infty, -3] \cup (0, 1]$, 故 C 正确.

4. B 【解析】因为函数 $f(x) = ax^2 + 2a$ 是定义在 $[4a, a+5]$ 上的偶函数, 所以 $4a + a + 5 = 0$, 解得 $a = -1$,

则函数 $f(x) = -x^2 - 2$, 其定义域为 $[-4, 4]$, 在区间 $[0, 4]$ 上单调递减. 又 $g(x) = f(x+1)$, 则 $g\left(-\frac{3}{2}\right) = f\left(-\frac{3}{2}+1\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$, $g(0) = f(1)$, $g(3) = f(4)$, 则有 $g\left(-\frac{3}{2}\right) > g(0) > g(3)$, 故 B 正确.

5. C 【解析】由当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$, 可知当 $0 < x < 4$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x > 4$ 时, $f(x) > 0$. 又因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以当 $-4 < x < 0$ 时, $f(x) > 0$; 当 $x < -4$ 时, $f(x) < 0$. 由 $\sqrt[3]{x}f(x) < 0$, 可得 $\begin{cases} x > 0, \\ f(x) < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < 0, \\ f(x) > 0 \end{cases}$, 解得 $0 < x < 4$ 或 $-4 < x < 0$, 所以不等式 $\sqrt[3]{x}f(x) < 0$ 的解集为 $(-4, 0) \cup (0, 4)$, 故 C 正确.

6. A 【解析】 $\because f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, \therefore 不等式 $f(x-t) \geq \sqrt{2}f(x)$ 恒成立等价于 $f(|x-t|) \geq \sqrt{2} \cdot f(|x|)$ 恒成立. \because 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \sqrt{x}$, \therefore 不等式等价于 $\sqrt{|x-t|} \geq \sqrt{2|x|}$ 恒成立, 即 $|x-t| \geq 2|x|$ 在 $[0, t-1]$ 上恒成立, 平方得 $x^2 - 2tx + t^2 \geq 4x^2$, 即 $3x^2 + 2tx - t^2 \leq 0$ 在 $[0, t-1]$ 上恒成立. 设 $g(x) = 3x^2 + 2tx - t^2$, 则满足 $\begin{cases} g(0) \leq 0, \\ g(t-1) \leq 0, \\ t-1 > 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -t^2 \leq 0, \\ 3(t-1)^2 + 2t(t-1) - t^2 \leq 0, \\ t-1 > 0, \end{cases}$ 解得 $1 < t \leq \frac{3}{2}$, \therefore 实数 t 的最大值是 $\frac{3}{2}$. 故 A 正确.

7. BD 【解析】由于 $y = f(x)$ 的图象关于点 $P(a, b)$ 成中心对称图形的

充要条件是 $y = f(x+a) - b$ 为奇函数, 对于 A, 因为 $f(x+a) - b = k(x+a) + m - b = kx + ka + m - b$, 若 $y = f(x+a) - b$ 为奇函数, 则 $-kx - ka + m - b = -kx + ka + m - b$, 所以 $ka + m - b = 0$, 解得 $a = 0, b = m$, 故 $f(x) = kx + m$ 的图象关于点 $(0, m)$ 对称, 故错误; 对于 B 因为 $f(x-1) - 2 = \frac{2(x-1)+1}{x-1+1} - 2 = \frac{2x-1}{x} - 2 = -\frac{1}{x}$, 所以 $f(x-1) + 2$ 为奇函数, 所以点 $(-1, 2)$ 为 $f(x)$ 图象的对称中心, 故正确; 对于 C, 设 $f(x) = x^3 - 2x^2$ 图象的对称中心为 (a, b) , 则 $f(x+a) - b = -f(-x+a) + b$, 即 $(x+a)^3 - 2(x+a)^2 - b = -(-x+a)^3 + 2(-x+a)^2 + b$, 所以 $(3a-2)x^2 + a^3 - 2a^2 - b = 0$, 即 $3a-2=0$, 所以 $a = \frac{2}{3}$, 故函数 $f(x) = x^3 - 2x^2$ 图象的对称中心的横坐标为 $\frac{2}{3}$, 故错误; 对于 D, 因为定义在 $[-3, 3]$ 的函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, -1)$ 成中心对称, 所以 $y = f(x) + 1$ 为奇函数, 设 $g(x) = f(x) + 1$, 则 $g(x) = -g(-x) = -f(-x) - 1$, 即 $g(-x) = f(-x) + 1$, 当 $0 < x \leq 3$ 时, $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$, 所以 $f(x) \in [-4, 0]$, $f(x) + 1 \in [-3, 1]$, 则 $g(-x) \in [-1, 3]$, 所以 $f(-x) \in [-2, 2]$, 所以 $f(x) \in [-4, 2]$, 故正确.

8. 【解】(1) 因为函数 $f(x)$ 是定义在 $[-4, 4]$ 上的奇函数, 所以 $f(1) = -f(-1) = 2$. 又因为当 $0 < x \leq 4$ 时, $f(x) = x^2 - ax$, 所以 $1 - a = 2$, 解得 $a = -1$. (2) 由(1)知当 $0 < x \leq 4$ 时, $f(x) = x^2 + x$. 当 $-4 \leq x < 0$ 时, $0 < -x \leq 4$, $f(-x) = (-x)^2 - x = x^2 - x$, 由 $f(x)$ 为奇函数, 得 $f(-x) = -f(x)$,

所以 $f(x) = -f(-x) = -x^2 + x$, $-4 \leq x < 0$, 又 $f(0) = 0$, 所以 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & 0 \leq x \leq 4, \\ -x^2 + x, & -4 \leq x < 0. \end{cases}$

(3) $f(m-1) + f(2m+1) \geq 0 \Rightarrow f(m-1) \geq -f(2m+1) \Rightarrow f(m-1) \geq f(-2m-1)$, 由(2)中的函数解析式可知, 当 $0 \leq x \leq 4$ 时, $f(x) = x^2 + x$ 单调递增, 当 $-4 \leq x < 0$ 时 $f(x) = -x^2 + x$ 单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $[-4, 4]$ 上单调递增, 所以 $-4 \leq -2m-1 \leq m-1 \leq 4$, 解得 $0 \leq m \leq \frac{3}{2}$, 即不等式的解集是 $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

易错警示 解不等式时一定要

注意函数的定义域

解与函数的相关不等式时, 一定要注意函数本身的定义域, 求解方法就是 f 不变, 则 $()$ 对应的范围不变.

9. 【解】(1) 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, $f(x) = f(-x) = (-x)^2 + 2 \cdot (-x) - 3 = x^2 - 2x - 3$, 所以 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \geq 0, \\ x^2 - 2x - 3, & x < 0. \end{cases}$ (2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$, 因此当 $x \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增. 因为 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且当 $x \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增, 所以 $f(m+1) < f(2m-1)$ 等价于 $f(|m+1|) < f(|2m-1|)$, 所以 $|m+1| < |2m-1|$. 因此 $(m+1)^2 < (2m-1)^2$, 即 $m^2 - 2m > 0$, 解得 $m > 2$ 或 $m < 0$, 所以实数 m 的取值范围是 $\{m \mid m < 0 \text{ 或 } m > 2\}$.

10. (1) 【解】 $f(x)$ 为奇函数. 证明: 函数 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, 其定义域为 \mathbf{R} , 又函数 $f(-x) = \frac{-x}{x^2+1} = -f(x)$, 故函数 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 【证明】设 $1 \leq x_1 < x_2$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1^2+1} - \frac{x_2}{x_2^2+1} = \frac{x_1(x_2^2+1) - x_2(x_1^2+1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} = \frac{(x_1x_2-1)(x_2-x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)},$$

又由 $1 \leq x_1 < x_2$, 得 $x_2 - x_1 > 0, x_1x_2 - 1 > 0$, 则 $f(x_1) - f(x_2) > 0$,

故函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减.

(3) 根据题意 $f(x)$ 为奇函数且 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递减.

11. 【解】(1) $\because f(1) = \frac{a-1}{1+b} = 0, \therefore a =$

$$1, f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+b}, \text{ 又 } \because f\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$-f(x), \text{ 即 } \frac{1-x^2}{1+b x^2} = \frac{1-x^2}{x^2+b}, \therefore b = 1,$$

$$\therefore f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \text{ 其定义域为 } \mathbf{R}, \text{ 且}$$

满足 $f(-x) = f(x), \therefore$ 函数 $f(x)$ 为偶函数.

$$(2) \text{ 函数 } f(x) = 1 - \frac{2}{x^2+1} \text{ 在 } (0,$$

$+\infty)$ 上单调递增.

证明: 令 $0 < x_1 < x_2$, 则 $x_1 - x_2 < 0$,

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) = \frac{2}{x_2^2+1} - \frac{2}{x_1^2+1} =$$

$$\frac{2(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} < 0, \therefore f(x_1) <$$

$$f(x_2), \therefore f(x) = 1 - \frac{2}{x^2+1} \text{ 在 } (0,$$

$+\infty)$ 上单调递增.

(3) 由 (1) (2) 知偶函数 $f(x) =$

$$1 - \frac{2}{x^2+1} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增,}$$

$$\therefore f(3x-1) > f(x+2) \Leftrightarrow |3x-1| >$$

$$|x+2| \Leftrightarrow 8x^2 - 10x - 3 > 0,$$

$$\text{解得 } x > \frac{3}{2} \text{ 或 } x < -\frac{1}{4}. \therefore \text{ 原不等式}$$

$$\text{的解集为 } \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

985 冲刺专题六 函数图象的变换与判断

1. B 【解析】函数 $f(x) = \frac{x-2}{x-1} = \frac{-1}{x-1} +$

1 的图象是由函数 $y = \frac{-1}{x}$ 的图象向右平移一个单位长度再向上平移一个单位长度得到的, 分析四个选项中的图象易得只有 B 中的图象符合要求.

2. B 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \therefore f(-x) =$

$$(-x)^2 - \frac{1}{|-x|} = x^2 - \frac{1}{|x|} = f(x), \therefore \text{ 函}$$

数 $f(x)$ 为偶函数, 其图象关于 y 轴对称, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$, 单调递增, 故 B 正确.

3. A 【思路导引】根据函数解析式判断函数图象时, 可通过定义域、单调性、奇偶性、特殊点的函数值等角度进行判断和排除.

【解析】因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且

$f(-x) = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是奇函数, 故 C 错误;

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > 0$, 故 B 错误;

$$\text{当 } x \in (1, +\infty) \text{ 时, } f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}}, \text{ 因}$$

为 x^2-1 的变化速度越来越快, $\sqrt[3]{x}$ 的变化速度越来越慢, 所以 $f(x) =$

$\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}}$ 的变化速度越来越快, 故 D 错误.

4. B 【解析】由函数 $f(x) =$

$$\frac{d}{ax^2+bx+c} (a, b, c, d \in \mathbf{R}) \text{ 的图象可}$$

得, 1 和 5 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的

$$\text{两个根, 所以 } \begin{cases} 1+5 = -\frac{b}{a}, \\ 1 \times 5 = \frac{c}{a}, \end{cases} \text{ 即 } ac > 0,$$

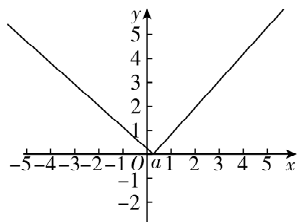
且 $ab < 0$, 故 A, C 错误;

$$\text{又 } f(0) = \frac{d}{c} < 0, \text{ 即 } cd < 0, \text{ 故 D}$$

错误.

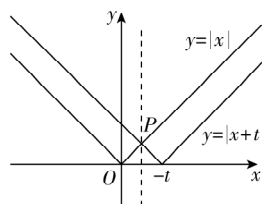
5. 2 【解析】根据题意, 将二次函数 $y = 3(x+1)^2 - 2$ 的图象先向右平移 2 个单位长度, 再向上平移 4 个单位长度, 得到二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象, 则有 $ax^2 + bx + c = 3(x+1-2)^2 - 2 + 4 = 3x^2 - 6x + 5$, 必有 $a = 3, b = -6, c = 5$, 故 $a+b+c = 2$.

6. $(-\infty, 1]$ 【解析】 $f(x) = |x-a|$ 的图象由函数 $y = |x|$ 的图象向右平移 a 个单位长度得到, 结合 $f(x) = |x-a|$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 可得其大致图象如图所示:



可得实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

7. -1 【解析】分别画 $y = |x|$ 和 $y = |x+t|$ 的图象, 如图.



根据 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称, 可以看出函数 $f(x) = \max\{|x|, |x+t|\}$ 的图象为“V”字形, 从图象可以看出, $y = |x+t|$ 的图象过点 $(1, 0)$, 即 $|1+t| = 0$, 解得 $t = -1$.

8. 【解】(1) 因为函数 $f(x) = \left|1 - \frac{1}{x}\right|$,

先作出函数 $y = 1 - \frac{1}{x}$ 的图象, 然后

再利用图象变换作出函数 $f(x) =$

$\left|1 - \frac{1}{x}\right|$ 的图象, 如图所示.